§ 3. ТЕОРЕМА О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ (ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА)

Установим зависимость между моментами инерции системы относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Пусть имеем две системы прямоугольных, взаимно параллельных осей координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$. Начало системы координат $Cx'y'z'$ находится в центре масс системы (рис. 24).

По определению момента инерции относительно оси имеем

$$J_{Oz}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2+y_k^2\right);$$

$$J_{Cz'}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k'^2+y_k'^2\right),$$

где m_k — масса точки M_k, а x_k, y_k, z_k и x_k', y_k', z_k' — координаты этой точки относительно систем координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$ соответственно. Если обозначить x_C, y_C, z_C координаты центра масс относительно системы координат $Oxyz$, то для взаимно параллельных осей координаты одной и той же точки M_k связаны соотношениями параллельного переноса

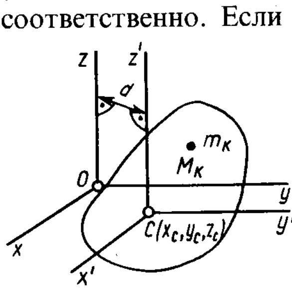

Рис. 24

$$x_k=x_k'+x_C;\quad y_k=y_k'+y_C;\quad z_k=z_k'+z_C,$$

Подставим эти значения координат в выражение момента инерции J_{Oz}. После преобразований получим

$$J_{Oz}=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k'^2+y'^{2k}\right)+2x_C\sum_{k=1}^{N} m_k x_k'+2y_C\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'+\left(x_C^2+y_C^2\right)\sum_{k=1}^{N} m_k.$$

В этом соотношении $\sum_{k=1}^{N} m_k=M$ — масса системы, $\sum_{k=1}^{N} m_k x_k' = =Mx_c'=0$ и $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'=My_C'=0$, так как $x_C'=0$ и $y_C'=0$ вследствие того, что по условию центр масс находится в начале координат этой системы координат.

Величина $x_C^2+y_C^2=d^2$, где d — расстояние между осями Oz и Cz'. Окончательно

$$J_{Oz}=J_{Cz'}+Md^2.$$

Связь моментов инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс, составляет содержание так называемой теоремы Штейнера или Гюйгенса — Штейнера: *момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями.*

Из теоремы Штейнера следует, что для совокупности параллельных осей момент инерции является наименьшим относительно оси, проходящей через центр масс.

Если взять ось O_1z_1 параллельной Oz, то для нее получим

$$J_{O_1z_1}=J_{Cz'}+Md_1^2,$$

где d_1 — расстояние между параллельными осями O_1z_1 и Cz'.

Исключая момент инерции $J_{Cz'}$ из двух последних формул, получим зависимость моментов инерции относительно двух параллельных осей, не проходящих через центр масс:

$$J_{O_1z_1}=J_{Oz}+M\left(d_1^2-d^2\right).$$

Установим изменение центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей координат. Имеем

$$J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' z_k'+y_C\sum_{k=1}^{N} m_k z_k'+z_C\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'+y_C z_C\sum_{k=1}^{N} m_k.$$

Учитывая, что $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k' z_k'=J_{y'z'}$, $\sum_{k=1}^{N} m_k z_k'=Mz_C'$; $\sum_{k=1}^{N} m_k y_k'=My_C'$, $\sum_{k=1}^{N} m_k=M$, получаем

$$J_{yz}=J_{y'z'}+My_C z_C'+Mz_C y_C'+My_C z_C,$$

где y_C', z_C' — координаты центра масс относительно системы координат $Cx'y'z'$. Аналогичные формулы получаются для двух других центробежных моментов инерции:

$$J_{zx}=J_{z'x'}+Mz_C x_C'+Mx_C z_C'+Mz_C x_C;$$

$$J_{xy}=J_{x'y'}+Mx_C y_C'+My_C x_C'+Mx_C y_C.$$

Так как начало системы координат $Cx'y'z'$ находится в центре масс, то $x_C'=0$, $y_C'=0$, $z_C'=0$ и тогда

$$J_{yz}=J_{y'z'}+My_C z_C;\quad J_{zx}=J_{z'x'}+Mz_C x_C;\quad J_{xy}=J_{x'y'}+Mx_C y_C, \qquad (10)$$

т. е. центробежные моменты инерции при параллельном переносе осей координат из любой точки в центре масс изменяются в соответствии с (10).

Если производится параллельный перенос осей $O_1x_1y_1z_1$ из точки O_1 в центр масс, то, согласно (10), имеем:

$$J_{y1z1}=J_{y'z'}+My_{1C}z_{1C};\ J_{z1x1}=J_{z'x'}+Mz_{1C}x_{1C};\ J_{x1y1}=J_{x'y'}+Mx_{1C}y_{1C}. \qquad (10')$$

Исключая из (10) и (10′) центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$, $J_{x'y'}$, получим формулы для изменения центробежных моментов инерции при параллельном переносе осей координат из точки O_1 в точку O:

$$J_{y1z1}=J_{yz}+M\left(y_{1C}z_{1C}-y_C z_C\right);\quad J_{z1x1}=J_{zx}+M\left(z_{1C}x_{1C}-z_C x_C\right);$$

$$J_{x1y1}=J_{xy}+M\left(x_{1C}y_{1C}-x_C y_C\right),$$

где $\left(x_{1C},\ y_{1C},\ z_{1C}\right)$ и $\left(x_C,\ y_C,\ z_C\right)$ — координаты центра масс в двух системах взаимно параллельных осей координат.